数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 250-256

合流型推移をもつ決定過程について

九州工業大学・大学院工学研究院　藤田 敏治
Toshiharu Fujita
Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology

九州工業大学・工学部　才川 尚輝
Naoki Saikawa
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1　はじめに

合流型推移とは，ノンシリアル動的計画 ([1, 7]) で規定されているノンシリアルな（非直列型の）状態推移の一つである．ノンシリアル推移には，分岐型 (Diverging Branch Systems)，合流型 (Converging Branch Systems)，そして分岐・再合流型 2 種 (Feedforward Loop Systems, Feedback Loop Systems) の計 4 種類がある．これまでに，分岐型の推移をもつ決定過程としては非決定性動的計画 ([2]) や相互依存型決定過程 ([3, 4, 5, 6]) が提案されてきた。本報告では，第 2 のノンシリアル推移である合流型推移をもつ有限段決定過程問題を新たに定式化し，動的計画法による再帰式を導く．

2　定式化

合流型推移においては，一般に複数の初期状態があり，状態推移の過程で合流し，そして最後は 1 つの終端状態に達しシステムの終了となる．ここで，X を有限状態空間，状態変数を $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N \in X$ とし，$x_1,\ x_2\ ,\ \ldots,\ x_L\ (L < N)$ は初期状態，x_N は終端状態とする．状態 x_i から状態 x_j へ推移するとき $e_{ij} = 1$，そうでないときは $e_{ij} = 0$ とおき，行列 $E = (e_{ij})$ を定める．さらに，x_j へ推移する状態のインデックス集合を $I_j = \{i \,|\, e_{ij} = 1\}$ とおく．

このとき，初期状態 $x_1,\ x_2\ ,\ \ldots,\ x_L$ に対する次の決定過程問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Max} & r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \cdots + r_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + k(x_N) \\
 & \text{s. t.} & x_n = f_n(x_m, u_m \,|\, m \in I_n) \quad n = L+1, L+2, \ldots, N \\
 & & u_n \in U_n(x_n) \quad n = 1, 2, \ldots, N-1
\end{array}
$$

ただし，U は有限決定空間で $U(x_n) \subset U$ は状態 $x_n \in X$ に対し選択可能な決定全体を表し，$r_n : \mathrm{Gr}(U) \to \mathbf{R},\ k : X \to \mathbf{R}$ はそれぞれ利得関数，終端利得関数である．なお

$$
\mathrm{Gr}(U) \ = \ \{(x,\ u) \in X \times U \,|\, u \in U(x)\}
$$

とする．また，状態 x_n への推移法則は，$I_n = \{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{M_n}\}\ (m_1 < m_2 < \cdots < m_{M_n})$ に対し

$$
x_n = f_n(x_{m_1}, u_{m_1}, x_{m_2}, u_{m_2}, \ldots, x_{m_M}, u_{m_{M_n}})
$$

で与えられ，これを $x_n = f_n(x_m, u_m \,|\, m \in I_n)$ と表す．なお，本論文では，一般に添え字集合 $I = \{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_M\}\ (m_1 < m_2 < \cdots < m_M)$ が与えられた際，簡略化のため，状態・決定の交互列：

$$
x_{m_1}, u_{m_1}, x_{m_2}, u_{m_2}, \ldots, x_{m_M}, u_{m_M}
$$

を $(x_m, u_m \,|\, m \in I)$ と表すこととする．

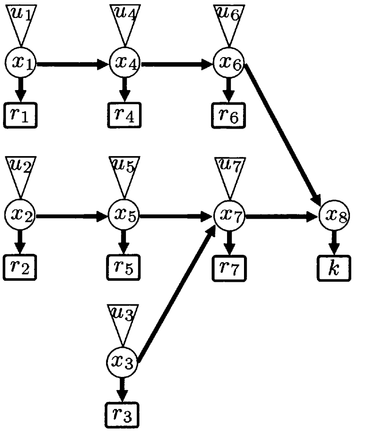

図 1: 状態推移図

例 2.1 $N=8,\ L=3$ とし $e_{14}=e_{25}=e_{37}=e_{46}=e_{57}=e_{68}=e_{78}=1$ (それ以外の (i,j) に対しては $e_{ij}=0$) とする．初期状態 x_1, x_2, x_3 が与えられたとき，x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 は次の推移により定まる：

$$\begin{aligned}
x_4 &= f_4(x_1,\ u_1),\ \ x_1\in X,\ u_1\in U(x_1)\\
x_5 &= f_5(x_2,\ u_2),\ \ x_2\in X,\ u_2\in U(x_2)\\
x_6 &= f_6(x_4,\ u_4),\ \ x_4\in X,\ u_4\in U(x_4)\\
x_7 &= f_7(x_3,\ u_3,\ x_5,\ u_5),\ \ x_3\in X,\ x_5\in X,\ u_3\in U(x_3),\ u_5\in U(x_5)\\
x_8 &= f_8(x_6,\ u_6,\ x_7,\ u_7),\ \ x_6\in X,\ x_7\in X,\ u_6\in U(x_6),\ u_7\in U(x_7).
\end{aligned}$$

図 1 は，この合流型推移をもつ決定過程の状態推移図を示したものである．

3 再帰式の導出

終端状態を根とみなした状態ツリー（例えば図 1 において，状態部分をノード，x_8 のノードを根とみなしたツリー）において，深さ優先探索を行う際にたどる順で，状態変数を 1 つずつ付加して部分問題群を構成する．このとき，x_N から付加する順に並べた状態変数の添え字を

$$N\ \to\ N-1\ \to\ N-2\ \to\ \cdots\ \to\ 2\ \to\ 1$$

とする．状態変数の順序は一意に定まらないが，順序を固定した際，必要に応じて添え字を付け替えることにより，この仮定は一般性を失わせるものではない．また，初期状態に対応する添え字の集合を I_{Init} とおく．

このとき，x_n, x_{n+1}, …, x_N $(n=1,2,\ldots,N)$ に対応する部分問題および最適値関数 v^n を次のように定める：

$n=N$ のとき

終端状態 x_N に対しては次のように定義する：

$$v^N(x_N)\ =\ k(x_N),\quad x_N\in X.$$

$n < N$ のとき

状態列 x_n, x_{n+1}, ..., x_N に対応する部分問題は次で定める：

$$v^n(x_n;(x_m,u_m\,|\,m\in J_n)) \;=\; \max_{u_n,u_{n+1},\dots,u_{N-1};(*)}\Big[r_n(x_n,u_n)+r_{n+1}(x_{n+1},u_{n+1})+\cdots+k(x_N)\Big],$$
$$x_n\in X,\quad x_m\in X,\ u_m\in U(x_m),\ m\in J_n.$$

ただし

$$J_n \;=\; \bigcup_{l=n+1}^{N}\{j\in I_l\,|\,j<n\}$$

$$(*):\begin{cases} u_l\in U(x_l), & l=n,n+1,\dots,N-1\\ x_{l+1}=f_{l+1}(x_m,u_m\,|\,m\in I_{l+1}), & l=n,n+1,\dots,N-1\end{cases}$$

である．状態変数 x_l $(l>n)$ が状態 x_n, ..., x_{l-1} および決定 u_n, ..., u_{l-1} で定まらない場合，値関数には，必要な情報をパラメータとして加えている．その際に必要となるパラメータの添え字集合が J_n である．

命題 3.1 $J_N=\phi$ とおく．このとき，J_n $(n=1,2,\dots,N-1)$ に対し

(i) $n+1\notin I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$J_n \;=\; J_{n+1}\cup\{j\in I_{n+1}\,|\,j<n\}$$

が成り立つ．また，$J_{n+1}=J_n\setminus I_{n+1}$ である．

(ii) $n+1\in I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$J_n \;=\; J_{n+1}\setminus\{n\}.$$

が成り立つ．また，$n\in J_{n+1}$ より $J_{n+1} \;=\; J_n\cup\{n\}$ である．

(i) は，終端状態を根とみなした状態ツリーにおいて新たに枝分かれする際，必要なパラメータの添え字を追加する処理である．x_{n+1} を定める際に必要となる状態の添え字を追加している．枝分かれがなくパラメータの追加が不要な場合，すなわち，x_n のみから x_{n+1} へ推移している場合，さらに言い換えると $I_{n+1}=\{n\}$ の場合は，条件 $j<n$ により，添え字の追加はなされない．また，(ii) は，x_{n+1} が初期状態なので，ツリーにおいて末端まで達した後の処理となる．この場合，深さ優先探索では未処理の枝分かれ部分に戻るので，これまでパラメータ扱いだった自分自身の添え字を除外している．

なお，一般に

$$I_i\cap I_j \;=\; \phi\ \ (i\neq j)$$

が成り立つので

$$J_n\cap I_n \;=\; \phi \qquad (n=1,\ 2,\ \dots,\ N-1)$$

である．

定理 3.1 値関数 v^n に対し，次の再帰式が成り立つ：

$$v^N(x_N) \;=\; k(x_N),\qquad x_N\in X$$

$$v^n(x_n;(x_m,u_m\,|\,m\in J_n))$$
$$=\; \max_{u_n\in U(x_n)}\Big[r_n(x_n,u_n)+v^{n+1}(f_{n+1}(x_m,u_m\,|\,m\in I_{n+1});(x_m,u_m\,|\,m\in J_{n+1}))\Big],$$
$$x_n\in X,\quad n+1\notin I_{\mathrm{Init}}$$

$$v^n(x_n;(x_m,u_m\,|\,m\in J_n))$$
$$=\; \max_{u_n\in U(x_n)}\Big[r_n(x_n,u_n)+v^{n+1}(x_{n+1};(x_m,u_m\,|\,m\in J_{n+1}))\Big],$$
$$x_n\in X,\quad n+1\in I_{\mathrm{Init}}.$$

証明　部分問題の定義より，式 (1) の左辺は

$$\begin{aligned}
& v^n(x_n;(x_m,u_m\,|\,m\in J_n)) \\
= & \max_{u_n,u_{n+1},\ldots,u_{N-1};(*)} \Big[r_n(x_n,u_n)+r_{n+1}(x_{n+1},u_{n+1})+\cdots+k(x_N)\Big] \\
= & \max_{u_n\in U(x_n)} \Big[\max_{u_{n+1},\ldots,u_{N-1};(*1)} \Big[r_n(x_n,u_n)+r_{n+1}(x_{n+1},u_{n+1})+\cdots+k(x_N)\Big]\Big] \\
= & \max_{u_n\in U(x_n)} \Big[r_n(x_n,u_n)+\max_{u_{n+1},\ldots,u_{N-1};(*1)} \Big[r_{n+1}(x_{n+1},u_{n+1})+\cdots+k(x_N)\Big]\Big]
\end{aligned}$$

ただし

$$(*1):\begin{cases} u_l\in U(x_l), \quad l=n+1,\ldots,N-1 \\ x_{l+1}=f_{l+1}(x_m,u_m\,|\,m\in I_{l+1}), \quad l=n,n+1,\ldots,N-1 \end{cases}$$

である．再び，部分問題の定義より

$$v^{n+1}(x_{n+1};(x_m,u_m\,|\,m\in J_{n+1})) \;=\; \max_{u_{n+1},\ldots,u_{N-1};(*2)} \Big[r_{n+1}(x_{n+1},u_{n+1})+\cdots+k(x_N)\Big]$$

$$(*2):\begin{cases} u_l\in U(x_l), \quad l=n+1,\ldots,N-1 \\ x_{l+1}=f_{l+1}(x_m,u_m\,|\,m\in I_{l+1}), \quad l=n+1,\ldots,N-1 \end{cases}$$

なので，$n+1\notin I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$\begin{aligned}
& v^n(x_n;(x_m,u_m\,|\,m\in J_n)) \\
= & \max_{u_n\in U(x_n)} \Big[r_n(x_n,u_n)+v^{n+1}(f_{n+1}(x_m,u_m\,|\,m\in I_{n+1});(x_m,u_m\,|\,m\in J_{n+1}))\Big]
\end{aligned}$$

$n+1\in I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$\begin{aligned}
& v^n(x_n;(x_m,u_m\,|\,m\in J_n)) \\
= & \max_{u_n\in U(x_n)} \Big[r_n(x_n,u_n)+v^{n+1}(x_{n+1};(x_m,u_m\,|\,m\in J_{n+1}))\Big]
\end{aligned}$$

を得る．　□

例 3.1 例 2.1 の状態推移を持つ決定過程に対し，x_8, x_7, x_3, x_5, x_2, x_6, x_4, x_1 の順で，x_n から開始する次の部分問題群を考えたい．構成順に状態の添え字をつけなおしたものが，図 2 であり，部分問題群を構成する際にたどる状態の添え字の順番は

$$8 \;\rightarrow\; 7 \;\rightarrow\; 6 \;\rightarrow\; 5 \;\rightarrow\; 4 \;\rightarrow\; 3 \;\rightarrow\; 2 \;\rightarrow\; 1$$

となる．また

$$N \;=\; 8, \quad I_{\mathrm{Init}} \;=\; \{1,\ 4,\ 6\}$$

である．まず，命題 3.1 を用いて，集合列 J_j $(j=8,7,\ldots,1)$ を構成する．$j=8$ のとき

$$J_8 \;=\; \phi.$$

$j=7\in I_8=\{3,\ 7\}$ で $8\notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_7 \;=\; J_8\cup\{j\in I_8\,|\,j<7\} \;=\; \phi\cup\{3\} \;=\; \{3\}$$

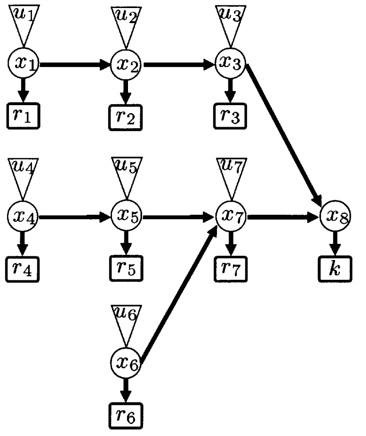

図 2: 添え字付け替え後の推移図

$j = 6 \in I_7 = \{5,\ 6\}$ で $7 \notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_6 \;=\; J_7 \cup \{j \in I_7 \,|\, j < 6\} \;=\; \{3\} \cup \{5\} \;=\; \{3,\ 5\}$$

$j = 5 \in I_7 = \{5,\ 6\}$ で $6 \in I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_5 \;=\; J_6 \setminus \{5\} \;=\; \{3,\ 5\} \setminus \{5\} \;=\; \{3\}$$

$j = 4 \in I_5 = \{4\}$ で $5 \notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_4 \;=\; J_5 \cup \{j \in I_5 \,|\, j < 4\} \;=\; \{3\} \cup \phi \;=\; \{3\}$$

$j = 3 \in I_8 = \{3,\ 7\}$ で $4 \in I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_3 \;=\; J_4 \setminus \{3\} \;=\; \{3\} \setminus \{3\} \;=\; \phi$$

$j = 2 \in I_3 = \{2\}$ で $3 \notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_2 \;=\; J_3 \cup \{j \in I_3 \,|\, j < 2\} \;=\; \phi \cup \phi \;=\; \phi$$

$j = 1 \in I_2 = \{1\}$ で $2 \notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_1 \;=\; J_2 \cup \{j \in I_2 \,|\, j < 1\} \;=\; \phi \cup \phi \;=\; \phi.$$

これより，部分問題群：

$$\begin{aligned} v^8(x_8) &= k(x_8) \\ v^n(x_n; (x_m, u_m | m \in J_n)) &= \max_{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{N-1}} \Big[r_n(x_n . u_n) + r_{n+1}(x_{n+1}, u_{n+1}) + \cdots + k(x_N) \Big]. \\ & \qquad\qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1 \end{aligned}$$

を得て，定理 3.1 によって対応する再帰式を求めると

$$v^8(x_8) \;=\; k(x_8)$$

$$
\begin{aligned}
v^7(x_7; (x_m, u_m \,|\, m \in J_7)) &= \max_{u_7 \in U(x_7)} \Big[r_7(x_7, u_7) + v^8(f_8(x_m, u_m \,|\, m \in I_8); (x_m, u_m \,|\, m \in J_8)) \Big] \\
v^7(x_7; (x_m, u_m \,|\, m \in \{3\})) &= \max_{u_7 \in U(x_7)} \Big[r_7(x_7, u_7) + v^8(f_8(x_m, u_m \,|\, m \in \{3,\ 7\}); (x_m, u_m \,|\, m \in \phi)) \Big] \\
v^7(x_7; x_3, u_3) &= \max_{u_7 \in U(x_7)} \Big[r_7(x_7, u_7) + v^8(f_8(x_3, u_3, x_7, u_7)) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^6(x_6; (x_m, u_m \,|\, m \in J_6)) &= \max_{u_6 \in U(x_6)} \Big[r_6(x_6, u_6) + v^7(f_7(x_m, u_m \,|\, m \in I_7); (x_m, u_m \,|\, m \in J_7)) \Big] \\
v^6(x_6; (x_m, u_m \,|\, m \in \{3,\ 5\})) &= \max_{u_6 \in U(x_6)} \Big[r_6(x_6, u_6) + v^7(f_7(x_m, u_m \,|\, m \in \{5,\ 6\}); (x_m, u_m \,|\, m \in \{3\})) \Big] \\
v^6(x_6; x_3, u_3, x_5, u_5) &= \max_{u_6 \in U(x_6)} \Big[r_6(x_6, u_6) + v^7(f_7(x_5, u_5, x_6, u_6); x_3, u_3) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^5(x_5; (x_m, u_m \,|\, m \in J_5)) &= \max_{u_5 \in U(x_5)} \Big[r_5(x_5.u_5) + v^6(x_6; (x_m, u_m \,|\, m \in J_6)) \Big] \\
v^5(x_5; (x_m, u_m \,|\, m \in \{3\})) &= \max_{u_5 \in U(x_5)} \Big[r_5(x_5.u_5) + v^6(x_6; (x_m, u_m \,|\, m \in \{3,\ 5\})) \Big] \\
v^5(x_5; x_3, u_3) &= \max_{u_5 \in U(x_5)} \Big[r_5(x_5.u_5) + v^6(x_6; x_3, u_3, x_5, u_5) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^4(x_4; (x_m, u_m \,|\, m \in J_4)) &= \max_{u_4 \in U(x_4)} \Big[r_4(x_4, u_4) + v^5(f_5(x_m, u_m \,|\, m \in I_5); (x_m, u_m \,|\, m \in J_5)) \Big] \\
v^4(x_4; (x_m, u_m \,|\, m \in \{3\})) &= \max_{u_4 \in U(x_4)} \Big[r_4(x_4, u_4) + v^5(f_5(x_m, u_m \,|\, m \in \{4\}); (x_m, u_m \,|\, m \in \{3\})) \Big] \\
v^4(x_4; x_3, u_3) &= \max_{u_4 \in U(x_4)} \Big[r_4(x_4, u_4) + v^5(f_5(x_4, u_4); x_3, u_3) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^3(x_3; (x_m, u_m \,|\, m \in J_3)) &= \max_{u_3 \in U(x_3)} \Big[r_3(x_3.u_3) + v^4(x_4; (x_m, u_m \,|\, m \in J_4)) \Big] \\
v^3(x_3; (x_m, u_m \,|\, m \in \phi)) &= \max_{u_3 \in U(x_3)} \Big[r_3(x_3.u_3) + v^4(x_4; (x_m, u_m \,|\, m \in \{3\})) \Big] \\
v^3(x_3) &= \max_{u_3 \in U(x_3)} \Big[r_3(x_3.u_3) + v^4(x_4; x_3, u_3) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^2(x_2; (x_m, u_m \,|\, m \in J_2)) &= \max_{u_2 \in U(x_2)} \Big[r_2(x_2, u_2) + v^3(f_3(x_m, u_m \,|\, m \in I_3); (x_m, u_m \,|\, m \in J_3)) \Big] \\
v^2(x_2; (x_m, u_m \,|\, m \in \phi)) &= \max_{u_2 \in U(x_2)} \Big[r_2(x_2, u_2) + v^3(f_3(x_m, u_m \,|\, m \in \{2\}); (x_m, u_m \,|\, m \in \phi)) \Big] \\
v^2(x_2) &= \max_{u_2 \in U(x_2)} \Big[r_2(x_2, u_2) + v^3(f_3(x_2, u_2)) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^1(x_1; (x_m, u_m \,|\, m \in J_1)) &= \max_{u_1 \in U(x_1)} \Big[r_1(x_1, u_1) + v^2(f_2(x_m, u_m \,|\, m \in I_2); (x_m, u_m \,|\, m \in J_2)) \Big] \\
v^1(x_1; (x_m, u_m \,|\, m \in \phi)) &= \max_{u_1 \in U(x_1)} \Big[r_1(x_1, u_1) + v^2(f_2(x_m, u_m \,|\, m \in \{1\}); (x_m, u_m \,|\, m \in \phi)) \Big] \\
v^1(x_1) &= \max_{u_1 \in U(x_1)} \Big[r_1(x_1, u_1) + v^2(f_2(x_1, u_1)) \Big]
\end{aligned}
$$

状態変数の添え字をもとの問題に対応させたものは次のとおりである.

$$
\begin{aligned}
v^8(x_8) &= k(x_8) \\
v^7(x_7; x_6, u_6) &= \max_{u_7}[r_7(x_7, u_7) + v^8(f_8(x_6, u_6, x_7, u_7))] \\
v^3(x_3; x_5, u_5, x_6, u_6) &= \max_{u_3}[r_3(x_3, u_3) + v^7(f_7(x_3, u_3, x_5, u_5); x_6, u_6)] \\
v^5(x_5; x_6, u_6) &= \max_{u_5}[r_5(x_5, u_5) + v^3(x_3; x_5, u_5, x_6, u_6)] \\
v^2(x_2; x_6, u_6) &= \max_{u_2}[r_2(x_2, u_2) + v^5(f_5(x_2, u_2); x_6, u_6)] \\
v^6(x_6) &= \max_{u_6}[r_6(x_6, u_6) + v^2(x_2; x_6, u_6)] \\
v^4(x_4) &= \max_{u_4}[r_4(x_4, u_4) + v^6(f_6(x_4, u_4))] \\
v^1(x_1) &= \max_{u_1}[r_1(x_1, u_1) + v^4(f_4(x_1, u_1))]
\end{aligned}
$$

□

4 さいごに

部分問題の構成については，その状態のたどり方が一意ではない点に注意が必要である．状態を追加する順序が異なれば，値関数のパラメータ数が一般に異なる．パラメータ数の最大値も当然異なり，すなわち計算上の有利・不利が生じてくる．本稿の例では，v^3 のパラメータ数 4 が最大となっているが，x_8，x_6，x_4，x_1，x_7，x_5，x_2，x_3 の順で部分問題群を構成していけば，パラメータ数の最大値は 2 となる．終端状態を根とみなした（状態推移）ツリーを深さ優先探索の順でたどる際，初期状態に至るまでの枝分かれ回数，そして枝分かれする際の分岐数に注意しながら，パラメータが少なくなるような順序を採用しなければならない．

謝辞

本研究は科研費 15K05004 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] U. Bertelé and F. Brioschi: *Nonserial Dynamic Programming* (Academic Press, New York, 1972).

[2] T. Fujita: On nondeterministic dynamic programming, *Mathematical Analysis in Economics (Kyoto, 2005) RIMS Kokyuroku*, **1488** (2006), 15–24.

[3] T. Fujita, 結合型評価をもつ相互依存型決定過程, 京都大学数理解析研究所講究録 1802, 78-84, 2012.

[4] T. Fujita, Associative criteria in mutually dependent markov decision processes, *Proceedings of IIAI International Conference on Advanced Applied Informatics* (2014), 147-150.

[5] T. Fujita: Mutually dependent decision processes models, *Bulletin of the Kyushu Institute of Technology*, **63** (2016), 15–26.

[6] T. Fujita and A. Kira, Mutually dependent markov decision processes, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, **18** (2014), 992-998.

[7] G.L. Nemhauser: *Introduction to Dynamic Programming* (Wiley, NY, 1966).